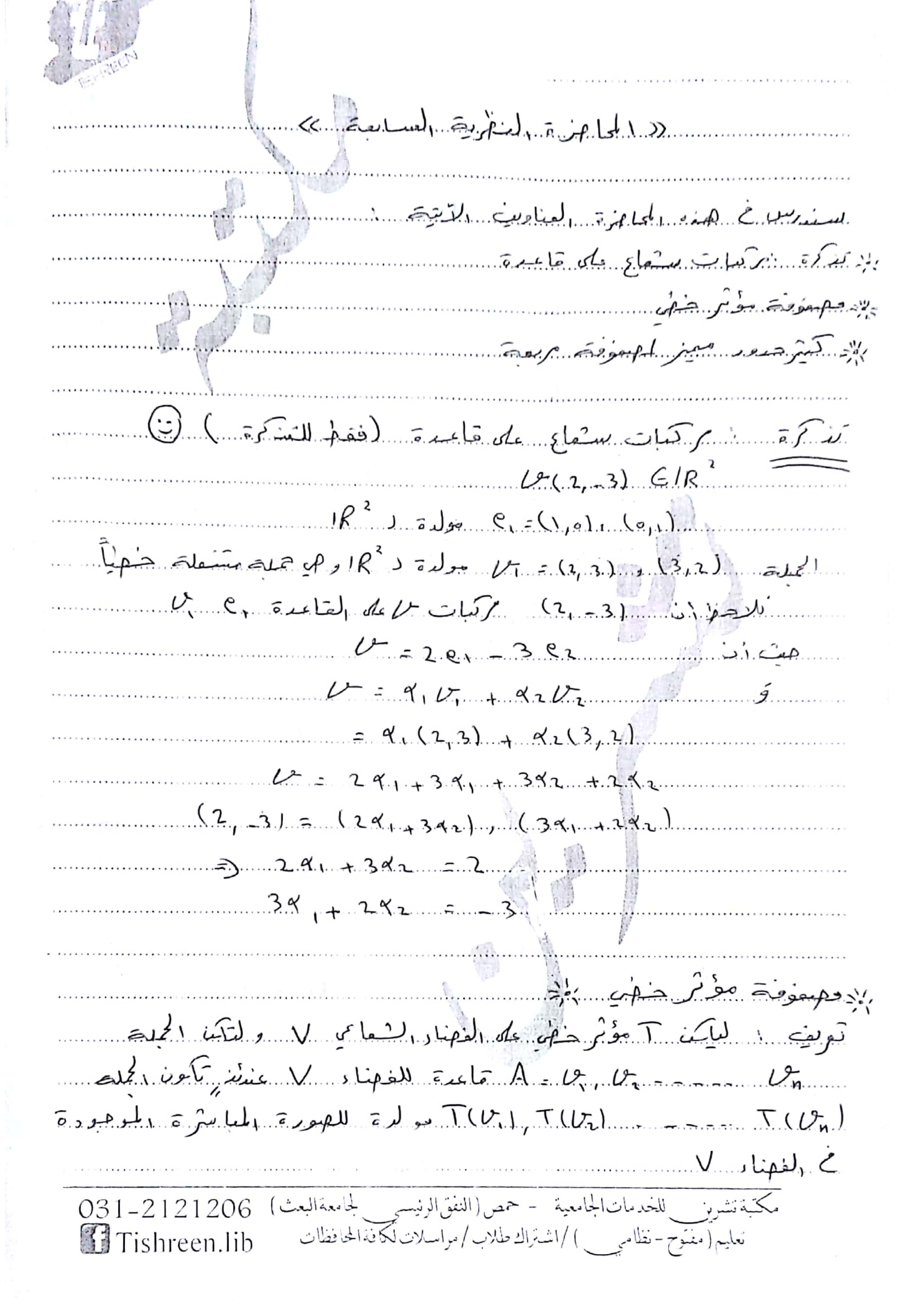


«المحاضرة النظرية السابعة»

سندرس في هذه المحاضرة العناوين الآتية:

* تذكرة: مركبات شعاع على قاعدة
* مصفوفة مؤثر خطي
* كثير حدود مميز لمصفوفة مربعة

تذكرة: مركبات شعاع على قاعدة (فقط للتذكرة) ☺

$v(2,-3)\in \mathbb{R}^2$

$e_1=(1,0),(0,1)$ مولدة لـ $\mathbb{R}^2$

الجملة $v_1=(2,3),(3,2)$ مولدة لـ $\mathbb{R}^2$ وهي جملة مستقلة خطياً

نلاحظ أن $(2,-3)$ مركبات v على القاعدة e_1, e_2، v_1

حيث أن $v=2e_1-3e_2$

و $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2$

$=\alpha_1(2,3)+\alpha_2(3,2)$

$v=2\alpha_1+3\alpha_1+3\alpha_2+2\alpha_2$

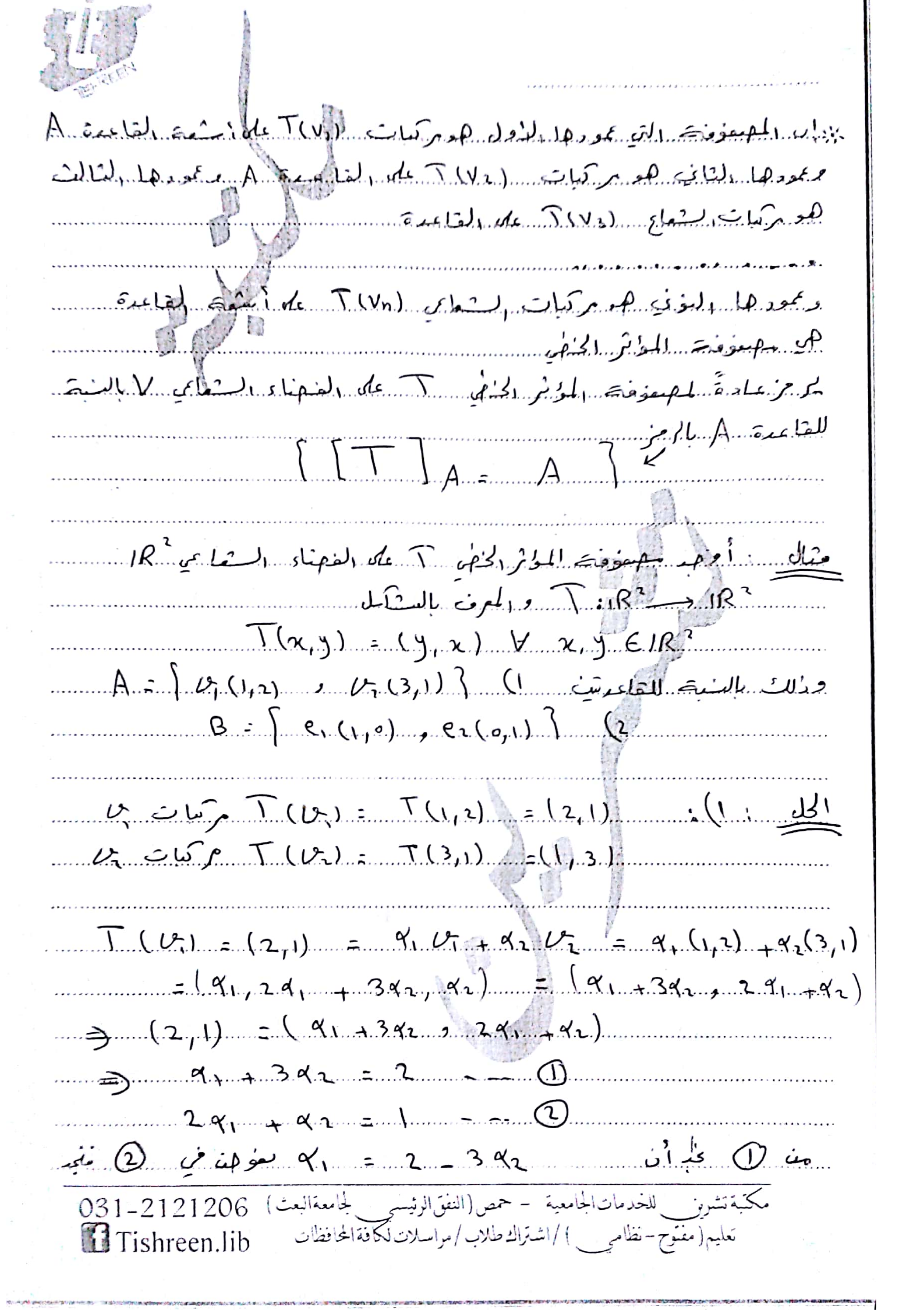
$(2,-3)=(2\alpha_1+3\alpha_2),(3\alpha_1+2\alpha_2)$

$\Rightarrow 2\alpha_1+3\alpha_2=2$

$3\alpha_1+2\alpha_2=-3$

* مصفوفة مؤثر خطي:

تعريف: ليكن T مؤثر خطي على الفضاء الشعاعي V ولتكن الجملة $A=v_1,v_2,\dots,v_n$ قاعدة للفضاء V عندئذٍ تكون الجملة $T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)$ مولدة للصورة المباشرة الموجودة في الفضاء V



أي المصفوفة التي عمودها الأول هو مركبات $T(v_1)$ على أشعة القاعدة A وعمودها الثاني هو مركبات $T(v_2)$ على القاعدة A وعمودها الثالث هو مركبات الشعاع $T(v_3)$ على القاعدة

....

وعمودها الأخير هو مركبات الشعاع $T(v_n)$ على أشعة القاعدة هي مصفوفة المؤثر الخطي

يرمز عادةً لمصفوفة المؤثر الخطي T على الفضاء الشعاعي V بالنسبة للقاعدة A بالرمز

$$\{ [T]_A = A \}$$

مثال: أوجد مصفوفة المؤثر الخطي T على الفضاء الشعاعي IR^2 والمعرف بالشكل $T: IR^2 \to IR^2$

$$T(x,y) = (y,x) \quad \forall\, x,y \in IR^2$$

وذلك بالنسبة للقاعدتين 1) $A = \{ v_1(1,2) , v_2(3,1) \}$

2) $B = \{ e_1(1,0) , e_2(0,1) \}$

الحل: 1): $T(v_1) = T(1,2) = (2,1)$ مركبات v_1

$T(v_2) = T(3,1) = (1,3)$ مركبات v_2

$$T(v_1) = (2,1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(1,2) + \alpha_2(3,1)$$

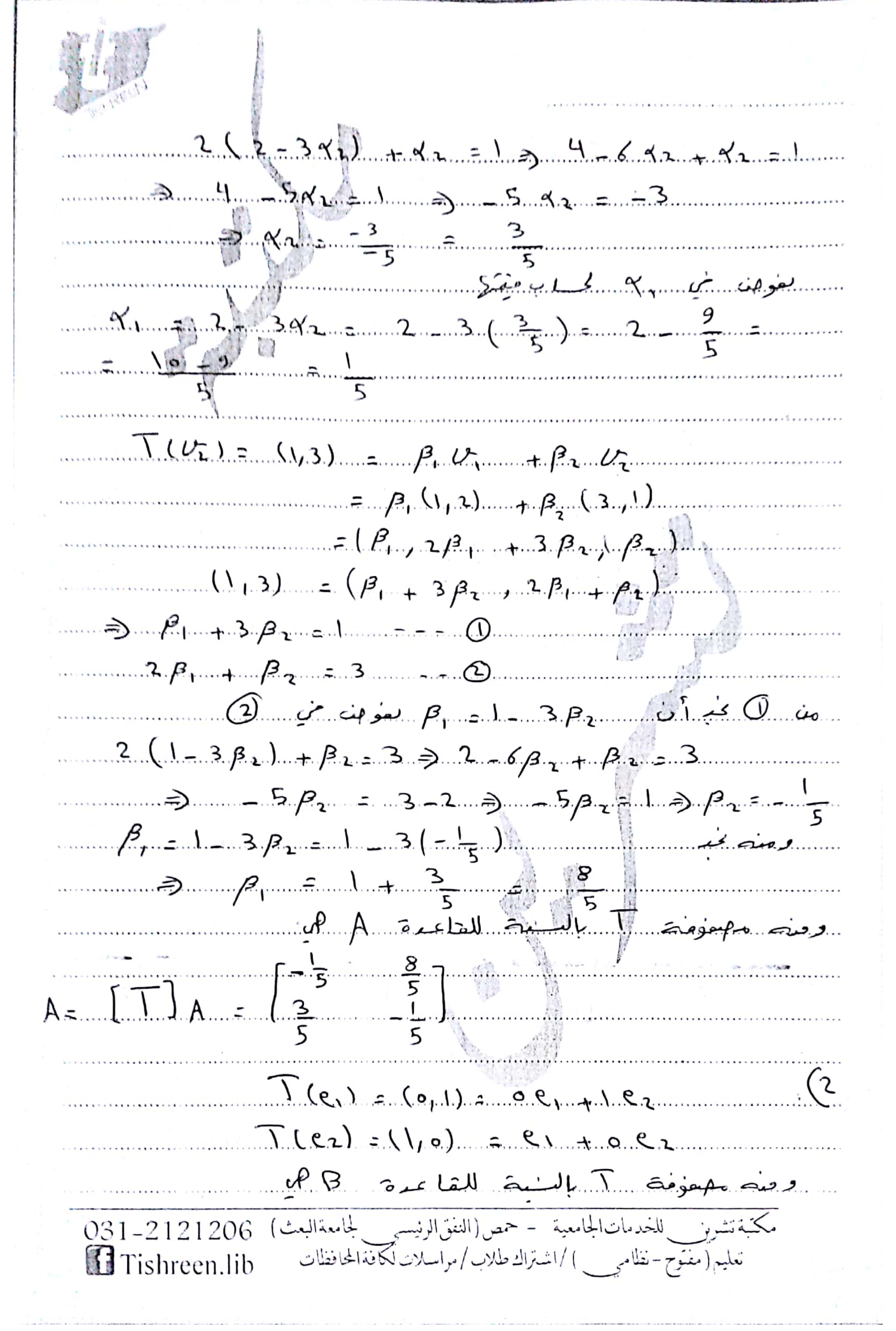
$$= (\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2) = (\alpha_1 + 3\alpha_2 , 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Rightarrow (2,1) = (\alpha_1 + 3\alpha_2 , 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + 3\alpha_2 = 2 \quad --- ①$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \quad --- ②$$

من ① نجد أن $\alpha_1 = 2 - 3\alpha_2$ نعوضها في ② فنجد



$2(2-3\alpha_2)+\alpha_2=1 \Rightarrow 4-6\alpha_2+\alpha_2=1$

$\Rightarrow 4-5\alpha_2=1 \Rightarrow -5\alpha_2=-3$

$\Rightarrow \alpha_2=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$

نعوض في α_2 لحساب فنجد

$\alpha_1=2-3\alpha_2=2-3\left(\frac{3}{5}\right)=2-\frac{9}{5}=$

$=\frac{10-9}{5}=\frac{1}{5}$

$T(v_2)=(1,3)=\beta_1 v_1+\beta_2 v_2$

$=\beta_1(1,2)+\beta_2(3,1)$

$=(\beta_1, 2\beta_1+3\beta_2, \beta_2)$

$(1,3)=(\beta_1+3\beta_2, 2\beta_1+\beta_2)$

$\Rightarrow \beta_1+3\beta_2=1$ --- ①

$2\beta_1+\beta_2=3$ --- ②

من ① نجد أن $\beta_1=1-3\beta_2$ نعوض في ②

$2(1-3\beta_2)+\beta_2=3 \Rightarrow 2-6\beta_2+\beta_2=3$

$\Rightarrow -5\beta_2=3-2 \Rightarrow -5\beta_2=1 \Rightarrow \beta_2=-\frac{1}{5}$

ومنه نجد $\beta_1=1-3\beta_2=1-3\left(-\frac{1}{5}\right)$

$\Rightarrow \beta_1=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$

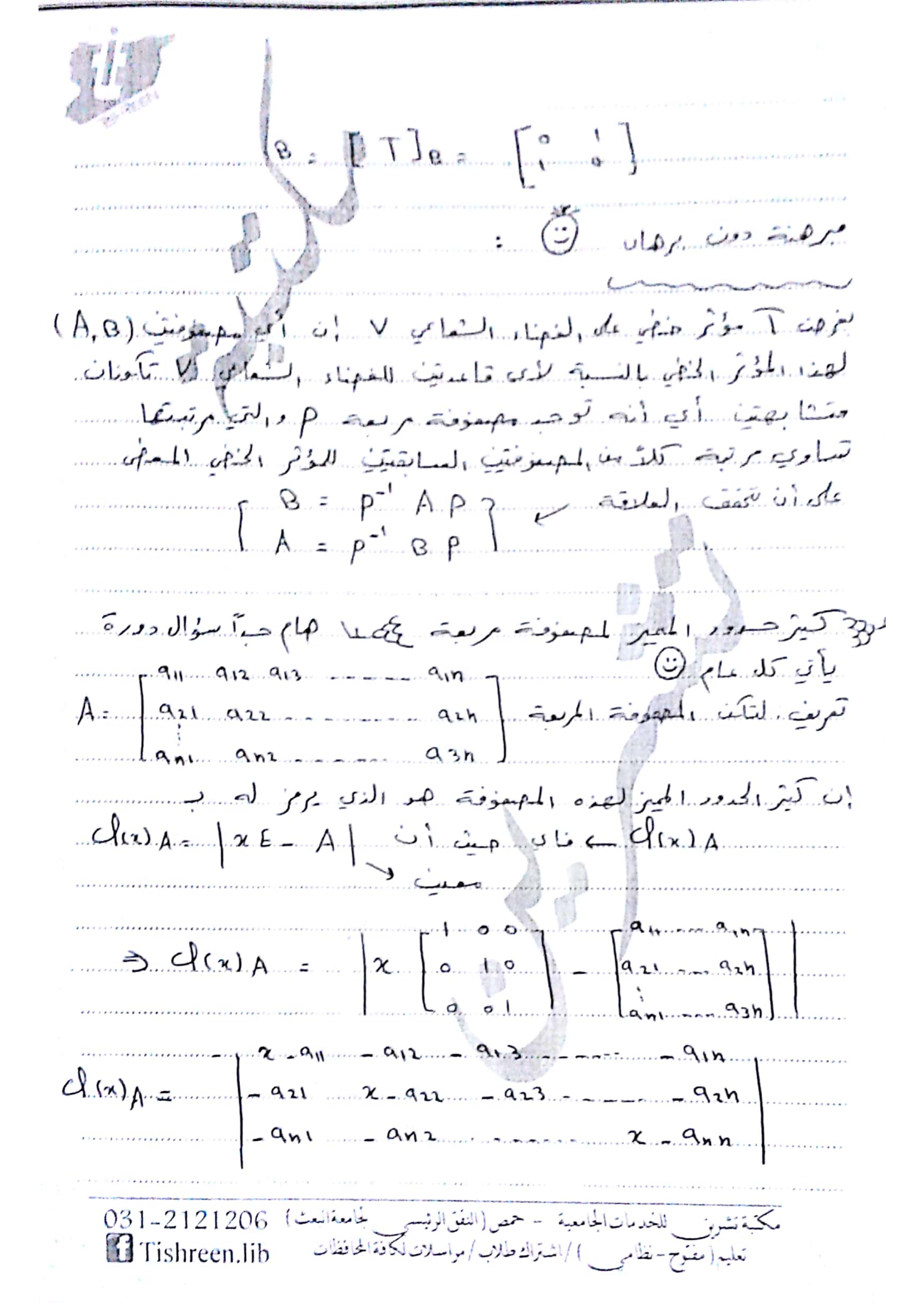
ومنه مصفوفة T بالنسبة للقاعدة A هي

$$A=[T]_A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{8}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

2) $T(e_1)=(0,1)=0e_1+1e_2$

$T(e_2)=(1,0)=e_1+0e_2$

ومنه مصفوفة T بالنسبة للقاعدة B هي



$B = [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

مبرهنة دون برهان ☺ :

بفرض T مؤثر خطي على الفضاء الشعاعي V إن المصفوفتين (A, B) لهذا المؤثر الخطي بالنسبة لأي قاعدتين للفضاء الشعاعي V تكونان متشابهتين أي أنه توجد مصفوفة مربعة P والتي مرتبتها تساوي مرتبة كل من المصفوفتين السابقتين للمؤثر الخطي المعرف على أن تحقق العلاقة ←

$$\begin{cases} B = P^{-1} A P \\ A = P^{-1} B P \end{cases}$$

كثير حدود المميز لمصفوفة مربعة هام جداً سؤال دورة يأتي كل عام ☺

تعريف: لتكن المصفوفة المربعة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix}$$

إن كثير الحدود المميز لهذه المصفوفة هو الذي يرمز له ب $d(x)_A$ ← فإن حيث أن $d(x)_A = |xE - A|$ → محدد

$$\Rightarrow d(x)_A = \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{3n} \end{bmatrix} \right|$$

$$d(x)_A = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال: احسب كثير الحدود المميز للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\ell(x)_A = |xE - A| = \left| x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) - (-2\times 3)$$

$$= (x-1)(x-2) + 6$$

$$= x^2 - 3x + 8$$

☼ مبرهنة دون برهان ☺ ☼

لتكن المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_n$

1) $\ell(x)_n$ كثير حدود من الدرجة n

2) إن معامل x^n يساوي الواحد

« أي معامل القوة الأكبر في المصفوفة يساوي الواحد »

3) معامل أمثال x^{n-1} يساوي $-\operatorname{tr} A$

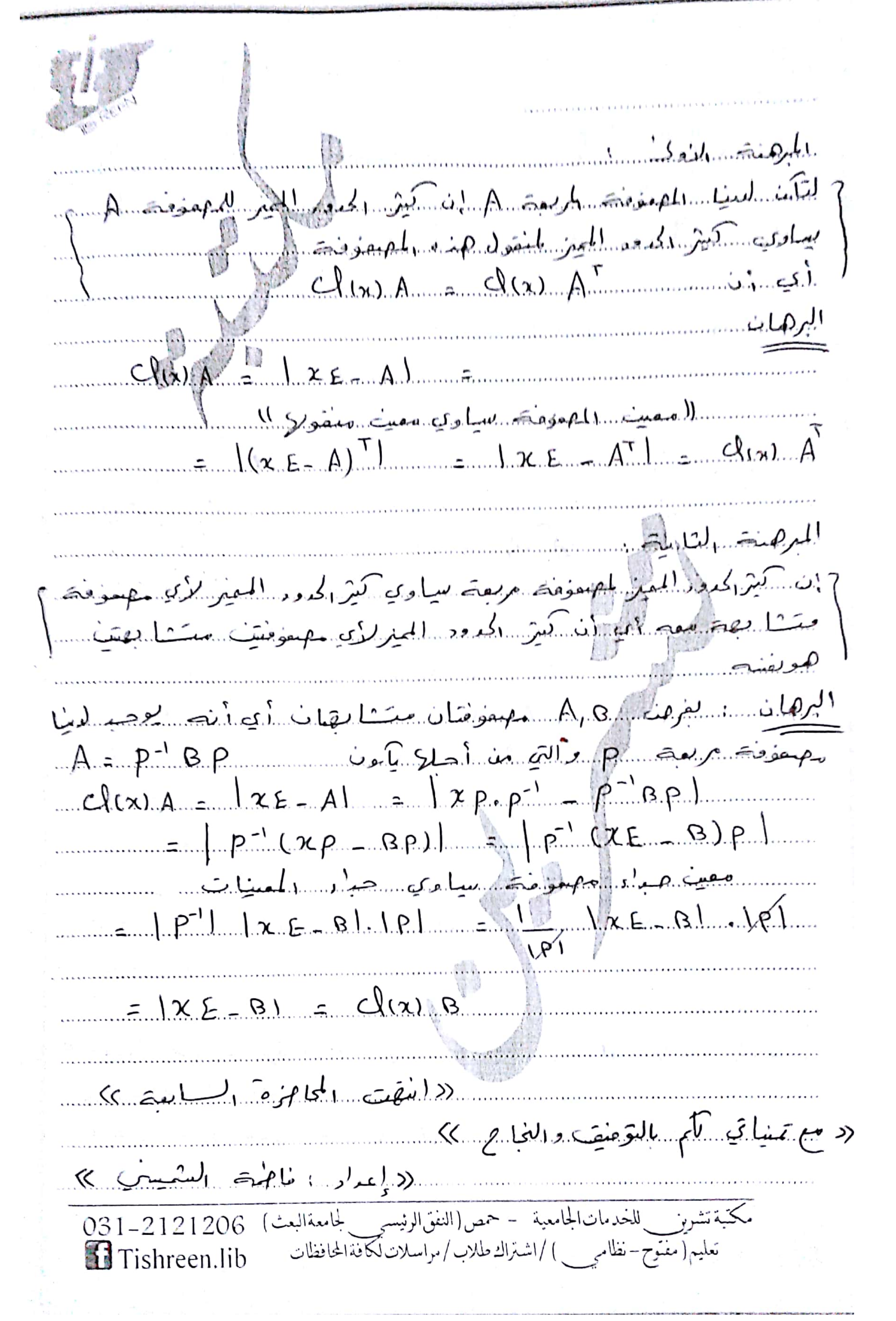
حيث $\operatorname{tr} A$ يسمى أثر المصفوفة A ويساوي مجموع عناصر القطر الرئيسي فيها

4) إن الحد الثابت في $\ell(x)_A$ يساوي $(-1)^n |A|$

((لاحظ تحقق هذه المبرهنة من أجل المصفوفة المربعة في المثال السابق))

((سننتقل الآن إلى مبرهنتين هامتين جداً)) أحد برهان المبرهنتين سيأتي سؤال امتحان ☺

لذلك يجب دراستهما جيداً ☺



المبرهنة الخامسة:

لتكن لدينا المصفوفة المربعة A إن كثير الحدود المميز للمصفوفة A يساوي كثير الحدود المميز لمنقول هذه المصفوفة

أي أن $Cl(x)_A = Cl(x)_{A^T}$

البرهان

$Cl(x)_A = |xE - A| =$

"المعين المصفوفة يساوي معين منقولها"

$= |(xE - A)^T| = |xE - A^T| = Cl(x)_{A^T}$

المبرهنة الثانية:

إن كثير الحدود المميز لمصفوفة مربعة يساوي كثير الحدود المميز لأي مصفوفة متشابهة معها أي أن كثير الحدود المميز لأي مصفوفتين متشابهتين هو نفسه

البرهان: نفرض A,B مصفوفتان متشابهتان أي أنه يوجد لدينا مصفوفة مربعة P والتي من أجلها يكون $A = P^{-1}BP$

$Cl(x)_A = |xE - A| = |xP.P^{-1} - P^{-1}BP|$

$= |P^{-1}(xP - BP)| = |P^{-1}(xE - B)P|$

معين جداء مصفوفة يساوي جداء المعينات

$= |P^{-1}|\,|xE - B|.|P| = \frac{1}{|P|}\,|xE - B|.|P|$

$= |xE - B| = Cl(x)_B$

«انتهت المحاضرة السابعة»

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

«إعداد: فاطمة الشمسي»